

Tik tak

Mirek Kubera

- Výstup RVP:** žák načrtne grafy elementárních funkcí a určí jejich vlastnosti, při konstrukci grafů aplikuje znalosti o zobrazeních, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, aplikuje vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi
- Klíčová slova:** goniometrické funkce, sinus, kosinus, amplituda, perioda, posunutí ve směru osy x , posunutí ve směru osy y , úhlová frekvence, derivace, poloha, rychlost

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

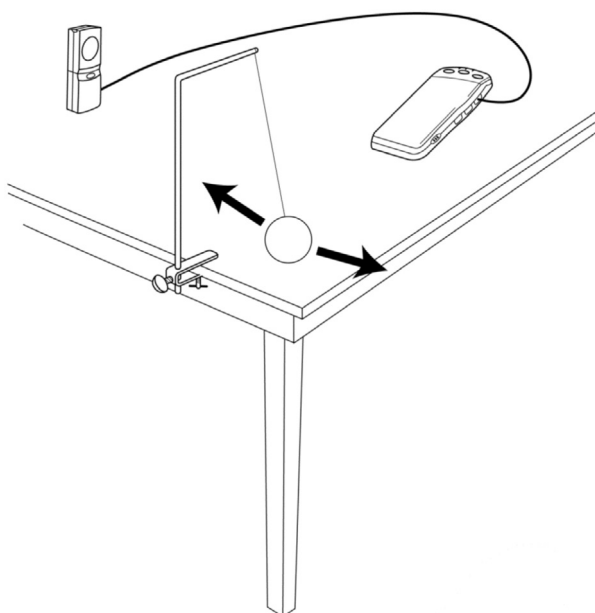
Obtížnost:

nízká

- Úkol**
- 1) Změřte závislost polohy pohybujícího se kyvadla na čase.
 - 2) Určete periodu kmitů kyvadla.
 - 3) Porovnejte graf naměřené závislosti s grafem funkce kosinus.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, kyvadlo délky 80 cm, stojan, dlouhé pravítko či metr

Teoretický úvod Pohyb kyvadla fascinoval lidstvo dlouhou dobu. Galileo pozoroval pohupující se svícen a srovnával jeho pohyb se svým pulsem. V roce 1851 Jean Foucault pomocí dlouhého kyvadla prokázal rotaci Země. Kyvadlo se pohybuje stále ve stejné rovině, zatímco Země pod ním se otáčí.



- Vypracování**
- 1) Zavěste kyvadlo na pevný stativ a umístěte sonar Go!Motion přibližně do vzdálenosti 50 cm od rovnovážné polohy kyvadla.
 - 2) Zapojte sonar Go!Motion do počítače a spusťte program Logger Pro.
 - 3) Změřte vzdálenost mezi kyvadlem ve svislé poloze a sonarem. Zapište tuto vzdálenost D do připravené tabulky.
 - 4) Umístěte metr pod kyvadlo. Jeho počátek musí být pod kyvadlem, které je v rovnovážné poloze (svislý závěs). Určete, jak daleko budete kyvadlo vychylovat při uvedení do pohybu. Tato vzdálenost by měla být alespoň 20 cm. Zapište tuto hodnotu do tabulky jako amplitudu A .
 - 5) Uvedte kyvadlo do pohybu a pomocí stopky změřte periodu jeho pohybu. Perioda je doba potřebná k tomu, aby se kyvadlo při svém pohybu vrátilo do původní polohy a pohyb se začal opakovat. Změřte desetinásobek periody a zapište tuto hodnotu do tabulky.

Tik tak

- 6) Jestliže se kyvadlo pohybuje pravidelně, spusťte **Sběr dat**. Měření bude probíhat po dobu pěti sekund.
- 7) Získaný graf závislosti vzdálenosti na čase by měl mít průběh podobný funkci kosinus. Jestliže máte pochybnosti o správnosti naměřených dat, poradte se se svým učitelem.

Analýza dat

- 1) Budete porovnávat naměřená data s průběhem funkce $y = A \cos(B(x - C)) + D$. Hodnoty změřené při nastavování experimentu, stejně jako naměřená data, vám umožní určit parametry A, B, C i D.
- 2) Klikněte do oblasti grafu a učiňte ho aktivním. Vyberte funkci **Analýza** → **Odečet hodnot** a určete hodnotu parametru C. Tato hodnota představuje posunutí křivky ve směru osy x oproti základní funkci kosinus. Základní kosinus má pro $x = 0$ maximální hodnotu. Určete tedy čas, ve kterém je naše naměřená křivka maximální. Tuto hodnotu запиšte do tabulky jako C.
- 3) Máte změřen desetinásobek periody T . Vypočítejte tedy hodnotu jedné periody T . Zapište ji do tabulky.
- 4) Parametr B se nazývá úhlová frekvence a vyjadřuje počet opakování, které funkce vykoná během doby 2π sekund. Vypočítejte hodnotu $B = \frac{2\pi}{T}$ a zapište ji do tabulky.

Tabulka naměřených hodnot

A (m)	
B (s ⁻¹)	
C (s)	
D (m)	
10·T (s)	
T (s)	

- 5) Nyní můžete vytvořit graf naměřené funkce. Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku....** Vyberte **Manuální aproximace** a zadejte nově definovanou funkci $A \cdot \cos(B \cdot (t - C)) + D$. Zadejte hodnoty parametrů A, B, C a D z tabulky.
 - a) Hodnota A je rovna amplitudě pohybu kyvadla.
 - b) Hodnota B je rovna úhlové frekvenci kyvadla.
 - c) Hodnota C je rovna hodnotě posunutí křivky ve vodorovném směru (čas).
 - d) Hodnota D je rovna hodnotě posunutí křivky ve směru osy y (vzdálenost od sonaru).
- 6) Jak dobře tato funkce prochází naměřenými daty? Jestliže proložení odpovídá naměřeným datům, zapište si vloženou rovnici a odpovídejte na další otázky. Jestliže křivka neodpovídá naměřeným datům, pokuste se parametry změnit tak, aby křivka procházela naměřenými daty. Diskutujte se svými spolužáky a učitelem, jaký vliv na proloženou křivku má který parametr. Výsledek opět zapište a pokračujte odpovědí na další otázky.

**Úkoly pro
zvědavé**

- 1) Jak by se změnily parametry A , B , C a D , jestliže bychom se pokusili modelovat tuto periodickou funkci funkcí $y = A \sin(B(x - C)) + D$ místo funkcí kosinus? Napište svou předpověď a každou z hodnot zdůvodněte.
- 2) Ověřte svou předpověď změnou modelu. Proložte naměřená data funkcí sinus charakterizovanou novými koeficienty A , B , C a D . Prochází tato funkce naměřenými daty? Pokud ne, proč? Opravte model tak, aby jimi procházela.
- 3) Jaký je význam jednotlivých koeficientů A , B , C a D z modelu pohybu kyvadla ve tvaru $y = A \cos(B(x - C)) + D$? Upřesněte.
- 4) Máte před sebou graf závislosti polohy kyvadla na čase. Zkuste spočítat derivaci této funkce. Vyberte **Data** → **Nový dopočítávaný sloupec**. Zadejte název a označení funkce této nové funkce (např. derivace, D1), případně její jednotku (zde m/s). V poli pro rovnici nového sloupce zadejte **derivace(„vzdálenost“)**. Získáte tak graf závislosti rychlosti kyvadla na čase. Jaká je souvislost obou studovaných závislostí? Kdy je rychlost kyvadla nulová? Kdy je rychlost kyvadla maximální? K odpovědi na tyto otázky si můžete vytvořit graf znázorňující obě funkce v závislosti na čase zároveň.

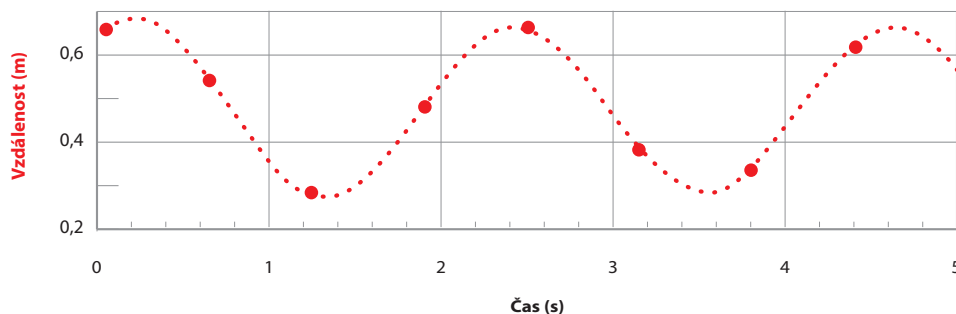
Tik tak

Mirek Kubera

Při této práci si žáci uvědomí a sami přijdou na význam pojmů amplituda, perioda a počáteční poloha kyvadla. Hodnoty těchto veličin sice můžeme snadno získat z naměřeného grafu, dáváme však přednost přímému nezávislému měření běžnými pomůckami (metr, stopky).

Závaží kyvadla by mělo být z tvrdého materiálu, aby nedocházelo k pohlcování a špatnému odrazu ultrazvukových vln. Míček o velikosti 5 cm je docela vhodný.

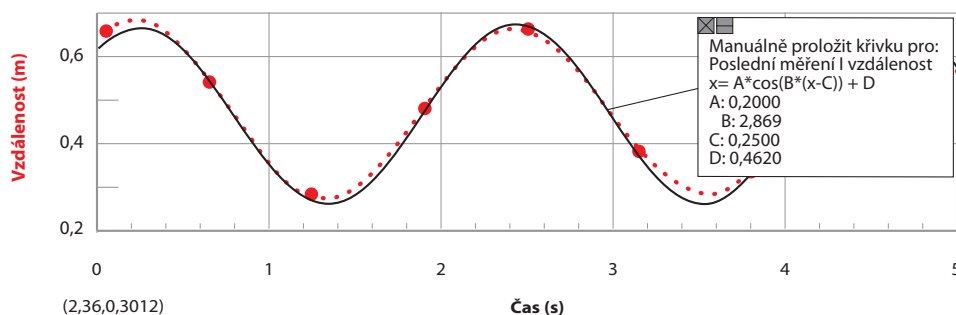
**Ukázka
naměřených
hodnot**



**Tabulka
naměřených
hodnot**

A (m)	0,20
B (s ⁻¹)	$\frac{2\pi}{T} = 2,87$
C (s)	0,25
D (m)	$\frac{0,653 + 0,271}{2} = 0,462$
10 · T (s)	21,9
T (s)	2,19

Jestliže zapíšeme získané hodnoty do tabulky upravující prokládanou funkci, získáme následující graf.



Vidíme, že proložená křivka prochází naměřenými daty. Rovnice této funkce je $y = 0,20 \cos(2,87(t - 0,25)) + 0,462$.

První parametr A = 0,20 m má význam amplitudy. Tato hodnota je různá od počáteční polohy kyvadla, protože měření začínáme v libovolný okamžik pohybu kyvadla.

Parametr B má význam úhlové frekvence pohybu kyvadla.

Hodnota C je posunutí grafu funkce kosinus ve směru osy x (tedy času). Odpovídá času, ve kterém graf funkce nabývá maximální hodnoty.

Posledním parametrem je posunutí grafu ve směru osy y. Funkce kosinus nabývá kladných a záporných hodnot, její střední hodnota je rovna nule. Naše funkce nabývá hodnot



Tik tak

od 0,271 m do 0,653 m. Jako střední hodnotu, kolem které kmitá náš oscilátor, tedy vezmeme aritmetický průměr hodnot krajních. Výsledek je $D = 0,462$ m.

- Zpracování dat** 1) Jak by se změnily parametry A, B, C a D, jestliže bychom se pokusili modelovat tuto periodickou funkci funkcí $y = A \sin(B(x - C)) + D$ místo funkcí kosinus? Napište svou předpověď a každou z hodnot zdůvodněte.

Odpověď: Jestliže použijeme funkci sinus, změní se pouze parametr C. Ostatní parametry zůstávají shodné s předchozím modelem. Amplituda funkce sinus a kosinus je shodná. $A = 0,20$ m. Hodnota B neboli úhlová frekvence se opět nemění, protože i funkce sinus a kosinus mají stejné periody, tudíž i úhlové frekvence. Posunutí funkcí ve směru osy y musí být opět stejné, protože popisují stejný jev. Pouze parametr C, tedy posun v čase, má jinou hodnotu. Funkce sinus a kosinus jsou vůči sobě posunuty o čtvrtinu periody, v našem případě je $T = 2,19$ s, čtvrtina tedy odpovídá 0,548 s. Funkce sinus se oproti funkci kosinus zpožďuje, musíme tedy od hodnoty $C_{\cos} = 0,25$ s hodnotu 0,548 s odečíst. Dostáváme hodnotu $C_{\sin} = -0,298$ s.

- 2) Ověřte svou odpověď změnou modelu. Proložte naměřená data funkcí sinus charakterizovanou novými koeficienty A, B, C a D. Prochází tato funkce naměřenými daty? Pokud ne, proč? Opravte model tak, aby jimi procházela.

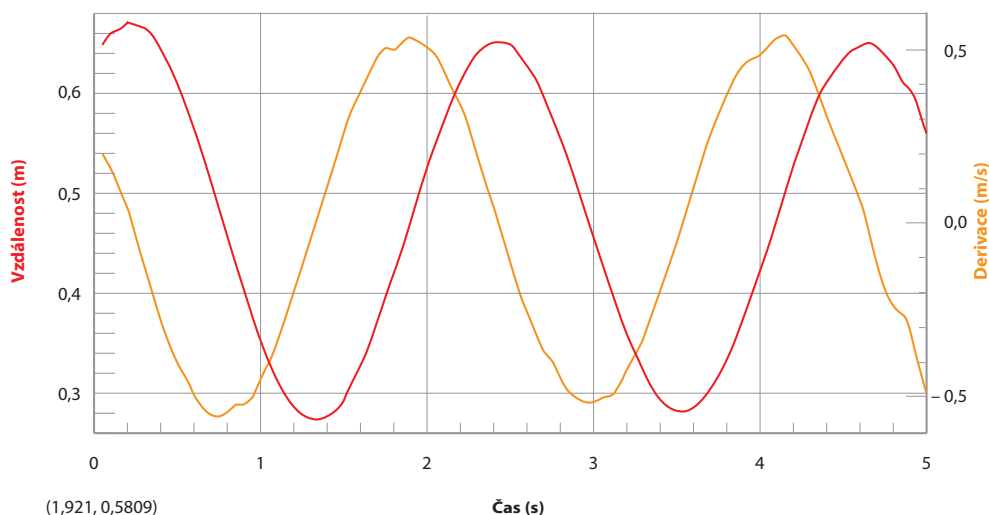
Odpověď: Funkce $y = 0,20 \sin(2,87(t - 0,298)) + 0,462$ zcela odpovídá naměřeným bodům a kopíruje původně proloženou funkci kosinus.

- 3) Opět napište, jaký je význam jednotlivých koeficientů A, B, C a D z modelu pohybu kyvadla ve tvaru $y = A \cos(B(x - C)) + D$.

Odpověď: Význam koeficientů byl osvětlen v předchozím textu.

- 4) Máte před sebou graf závislosti polohy kyvadla na čase. Zkuste spočítat derivaci této funkce. Vyberte **Data** → **Nový dopočítávaný sloupec**. Získáte tak graf závislosti rychlosti kyvadla na čase. Jaká je souvislost obou studovaných závislostí? Kdy je rychlost kyvadla nulová? Kdy je rychlost kyvadla maximální? K odpovědi na tyto otázky si můžete vytvořit graf znázorňující obě funkce v závislosti na čase zároveň.

Odpověď: Jestliže zobrazíme do jednoho grafu obě funkce, tedy vzdálenost a její derivaci v závislosti na čase, získáme následující graf. Červená křivka znázorňuje vzdálenost kyvadla, oranžová pak její derivaci neboli rychlost pohybu kyvadla.



Pro lepší odečítání v něm byla znázorněna ještě vedlejší mřížka.

Obě funkce spolu zcela zřetelně souvisejí. Obě jsou periodické a mají shodnou periodu. Když jedna z nich nabývá své maximální hodnoty, druhá prochází svou střední hodnotou, a obráceně. Stejně se chovají i funkce sinus a kosinus, nebo právě funkce kosinus a její derivace.

Rychlost kyvadla je tedy maximální v okamžiku, když prochází rovnovážnou polohou, a naopak nulová, když se kyvadlo nachází ve své krajní poloze charakterizované svou maximální výchylkou. Je jedno, zda vpravo nebo vlevo od rovnovážné polohy.