

Funkce – nepřímá úměrnost

Pod tlakem!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

Klíčová slova: nepřímá úměrnost, graf funkce, hyperbola

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

10 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

Úkol Změřte závislost tlaku na objemu vzduchu uzavřeného v injekční stříkačce. Porovnejte objevenou závislost s grafem funkce nepřímé úměrnosti. Provedte substituci proměnné a převedte naměřená data na přímou úměrnost.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, LabQuest, čidlo tlaku s dodávanou injekční stříkačkou

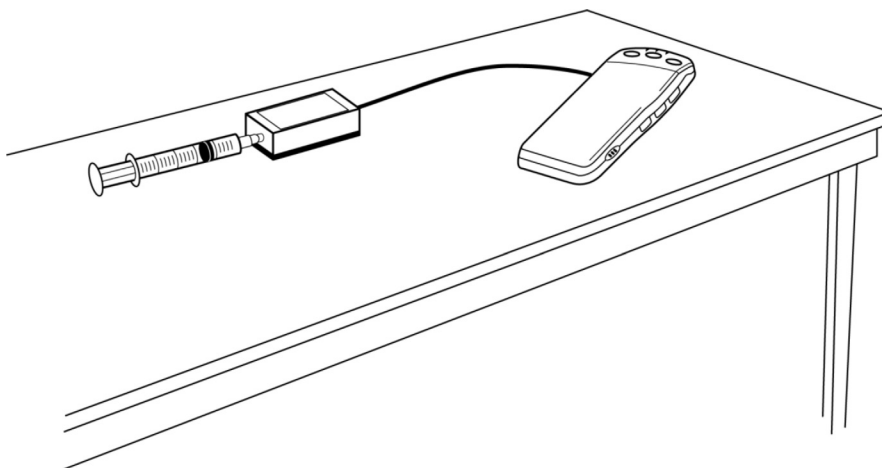
Teoretický úvod Vezměme vzduch uzavřený v nádobě mající pokojovou teplotu. Jestliže změníme objem nádoby, co se bude dít s tlakem vzduchu uvnitř? Můžete si to lépe představit, jestliže vezmete malý balónek a budete ho mačkat prsty. Když bude mít menší objem, budete muset mačkat silněji. To znamená, že když se zmenšuje objem, tlak uvnitř narůstá. Dvě veličiny, které jsou spolu svázány, se mění v závislosti jedna na druhé **nepřímo úměrně**.

Dále můžeme pozorovat, že součin dvou nepřímo úměrných veličin zůstává konstantní.

Předpokládejme, že veličiny x a y jsou nepřímo úměrné. Potom platí $x \cdot y = k$ nebo $y = \frac{k}{x}$,

kde k je v obou vztazích konstantní hodnota. V našem případě je x rovno objemu vzduchu uzavřeného ve stříkačce (ml), y je hodnota tlaku (kPa) a k je konstanta odpovídající součinu tlaku a objemu (kPa·ml).

Možná už tušíte, že některé další veličiny se mění přesně tímto způsobem. Pro vzduch a další plyny se tento vztah nazývá Boyle-Mariottův zákon.



- Vypracování**
1. Připravte injekční stříkačku a tlakový senzor k měření. Píst stříkačky umístěte prvním černým kroužkem na značku 10 ml a poté spojte stříkačku s tlakovým čidlem.
 2. Spusťte program Logger Pro a připravte měření. V nastavení **Sběru dat** vyberte mód **Události se vstupy**. Nově zadávanou veličinou je objem v ml.
 3. Nastavte správně zobrazení měřených veličin. Na vodorovnou osu vyberte **Objem (ml)** a na svislou **Tlak (kPa)**.
 4. Nyní máte vše připraveno k měření. Spusťte **Sběr dat**. Jako první změříme hodnotu tlaku pro objem nastavený na 10 ml. Protože však tlakové čidlo má také svůj vnitřní objem, nebudeme zapisovat hodnotu nastavenou na stříkačce, ale hodnotu o 0,8 ml větší, což odpovídá objemu vzduchu uzavřenému v čidle. Stiskneme **Zachovat** a zapíšeme objem vzduchu 10,8 ml.

úloha
2

Pod tlakem!

- Posuneme píst stříkačky na hodnotu 9 ml, stiskneme **Zachovat** a zapíšeme objem vzduchu 9,8 ml.
- Takto pokračujeme pro objemy 8, 7, 6 a 5 ml, dále pak zvětšujeme objem vzduchu mezi 11 a 20 ml. Vždy zapíšeme objem o 0,8 ml větší.
- Měření ukončíme stiskem tlačítka **Stop**. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v grafu a uloženy v tabulce.

objem V (ml)	tlak p (kPa)	součin p·V (ml·kPa)
10,8		
9,8		
8,8		
7,8		
6,8		
5,8		
11,8		
12,8		
13,8		
14,8		
15,8		
16,8		
17,8		
18,8		
19,8		
20,8		

- Analýza dat**
- Klikněte do oblasti grafu, aby se stal aktivním, a vyberte tlačítko **Odečtet hodnot**.
 - Pohybuje kurzorem v grafu po naměřených hodnotách. S rostoucím objemem V na ose x můžeme pozorovat výrazný pokles tlaku p na ose y.
 - Abychom ověřili platnost Boyle-Mariottova zákona, můžeme naměřenými daty proložit funkci nepřímé úměrnosti $y = A/x$.
 - Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zatrhněte **Manuální aproximaci** a vyberte funkci **Převrácená hodnota**. Nyní je potřeba doladit hodnotu koeficientu A. Začněte na hodnotě 1000 a postupně ji upravujte tak, aby proložení odpovídalo naměřeným datům.
 - Zkopírujte data z tabulky do Excelu nebo jiného tabulkového procesoru, případně je zpracovávejte přímo v programu Logger Pro. Vypočítejte součin naměřených hodnot tlaku a objemu. Povšimněte si, že hodnoty součinu jsou velmi blízké hodnotě koeficientu A, kterou jste našli v předchozím kroku. Vysvětlete, proč tomu tak je.
 - Funkce, kterou jste před chvílí našli, může být použita k hledání předpovědí:
 - Jaký bude tlak vzduchu ve stříkačce, když nastavíme následující objemy (tyto hodnoty nesouvisí s provedeným měřením)?

objem (ml)	tlak (kPa)
2,5	
17,8	
520	
0,0012	

b. Můžeme objem nastavit na nulu? Proč ano, či proč ne? Jaký bude odpovídající tlak?

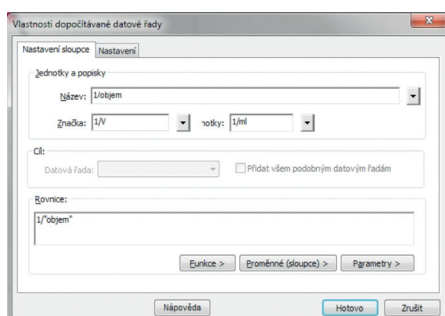
c. Doplňte následující větu:

S tím, jak klesá objem plynu ve stříkačce, jeho tlak _____.

7. Další možností, jak ověřit vztah nepřímé úměrnosti mezi dvěma veličinami, je znázornit graf závislosti velikosti jedné veličiny v závislosti na převrácené hodnotě druhé veličiny. V této aktivitě například tlak v závislosti na převrácené hodnotě objemu vzduchu. Pokud totiž upravíme hledaný vztah $p = \frac{A}{V} = A \cdot \frac{1}{V}$, vidíme, že tlak a převrácená hodnota objemu jsou přímo úměrné. Provedte proto následující test.

a. Vložte nový graf **Vložit**→**Graf**.

b. Vypočítejte převrácenou hodnotu objemu **Data**→**Nový dopočítávaný sloupec**.



c. V nově vytvořeném grafu klikněte na označení os a zvolte odpovídající jednotky: na osu x vložte **1/objem (1/ml)** a na osu y pak **tlak (kPa)**.

d. Pokud se vám graf nezobrazil správně, zvolte **Automatické měřítko (Ctrl+J)**.

e. Můžeme říci, že jsou hodnoty přímo úměrné? Lze zobrazenými body proložit přímkou procházející počátkem? Ověřte volbou **Analýza**→**Proložit křivku**. Zvolte **Přímá úměra, automatická aproximace**.

f. Jaká je hodnota koeficientu přímé úměrnosti? Porovnejte ji s proložením hyperbolou.

Pod tlakem!

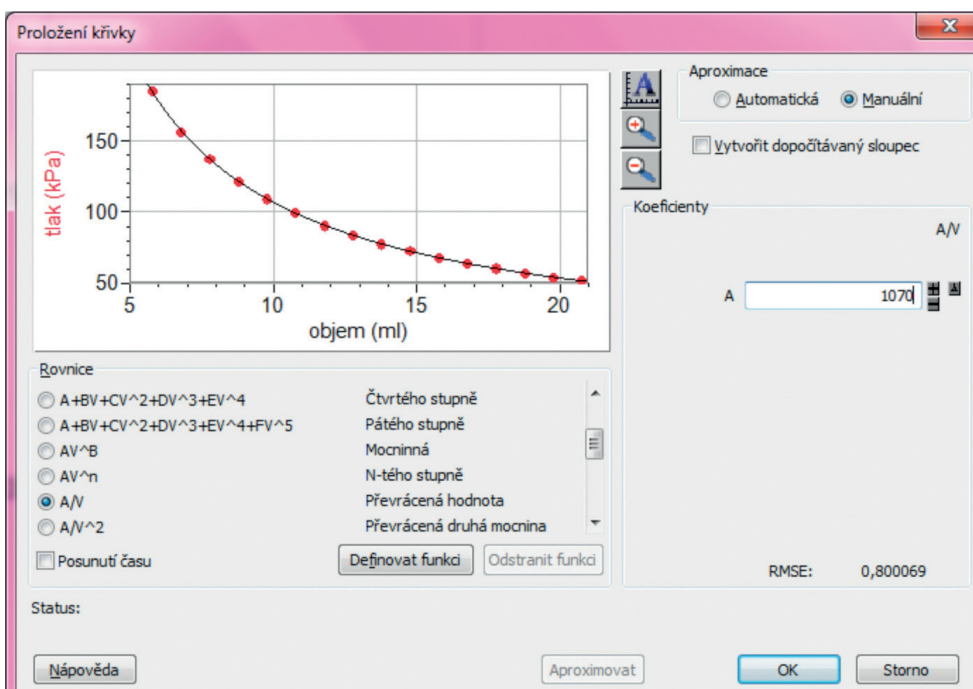
Mirek Kubera

**Tabulka
naměřených
hodnot
(příklad)**

objem V (ml)	tlak p (kPa)	součin p·V (kPa·ml)
10,8	98,7	1066
9,8	108,4	1062
8,8	121,0	1065
7,8	136,5	1065
6,8	155,6	1058
5,8	184,7	1071
11,8	89,5	1056
12,8	83,3	1067
13,8	76,5	1055
14,8	72,2	1069
15,8	67,2	1061
16,8	63,1	1060
17,8	59,6	1060
18,8	56,1	1054
19,8	53,3	1056
20,8	51,0	1060

Výsledky a výpočty

- Při ručním prokládání hyperboly (rovnice $p = \frac{A}{V}$) naměřenými daty zkusíme najít koeficient A , který nejlépe odpovídá naměřeným datům. Lze ho měnit přímým zadáním nebo změnami krokovými přes ovládací prvky. V našem případě má hodnotu přibližně 1070 kPa·ml. Pro tuto hodnotu graf nepřímé úměrnosti pěkně prochází naměřenými body.

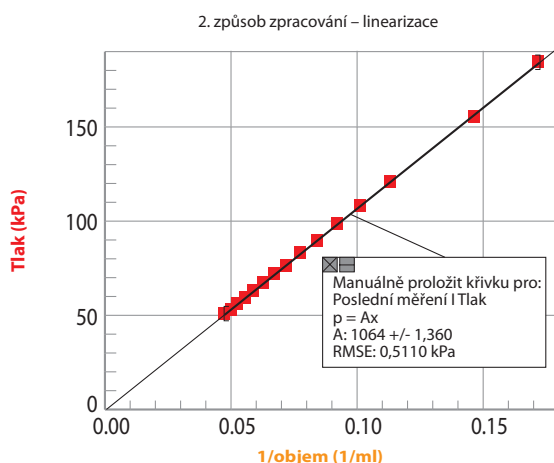


Pod tlakem!

2. Při výpočtu součinu tlaku a objemu vidíme, že tento součin je přibližně konstantní. Po všimněte si, že hodnoty součinu jsou velmi blízké hodnotě koeficientu A , kterou jsme našli v předchozím kroku. Je tomu tak proto, že rovnice nepřímé úměrnosti je $y = \frac{A}{x}$, kde A je konstanta. Vynásobením rovnice funkce hodnotou x získáme rovnici ve tvaru $x \cdot y = A$. Pokud jsme tedy při prokládání bodů ramenem hyperboly postupovali správně, měly by si tyto hodnoty být velmi blízké. Tabulka ukazuje hodnotu kolem 1060 kPa·ml, dobré proložení pak hodnotu 1070 kPa·ml. Shoda je velmi dobrá.
3. Funkce, kterou jste před chvílí našli, může být použita k hledání předpovědi:
 - a. *Jaký bude tlak vzduchu ve stříkačce, když nastavíme následující objemy?*
K odpovědi na položenou otázku využijeme rovnice nepřímé úměrnosti zjištěné v předchozím kroku $p = \frac{1070}{V}$, kde p je tlak v kPa a V objem v ml.

objem (ml)	tlak (kPa)
2,5	428
17,8	60,1
520	2,1
0,0012	891700

- b. *Můžeme objem nastavit na nulu? Proč ano či proč ne? Jaký bude odpovídající tlak?*
Objem nelze nastavit na nulu, protože tomuto objemu by odpovídal nekonečný tlak. Tolik teoreticky. Nelze to udělat ani prakticky, protože vzduch je sice stlačitelný, nikoliv však dokonale. Druhým problémem, na který bychom narazili, že tlakoměr by nevydržel tlaky nad 200 kPa.
 - c. *Doplňte následující větu: S tím, jak klesá objem plynu ve stříkačce, jeho tlak **vzrůstá**.*
4. Analýza nového grafu:
Byla provedena substituce, převrácenou hodnotu objemu $1/V$ nahrazujeme novou veličinou a graficky znázorňujeme závislost tlaku p na $1/V$.



Z grafu vidíme, že tlak je přímo úměrný převrácené hodnotě objemu. Grafickým znázorněním je přímka procházející počátkem. Automatickým proložení přímky získáme její rovnici $p = 1064 \cdot \frac{1}{V}$. Koeficient přímé úměrnosti odpovídá hodnotě zjištěné v předchozí aktivitě.